Neurčitý integrál I.

Příklady pro cvičení „počítání“ integrálů“ :
Najděte primitivní funkce na maximálních intervalech (tyto intervaly je „dobré“ vždy udávat).

Poznámka k zadání příkladů:
Integrály jsou zde rozděleny do skupin podle podobného „charakteru“ integrálu, s návodem, jaký nástroj pro výpočet si můžeme zvolit – zároveň s počítáním integrálů tak trénujeme i to, jak poznat, který z nástrojů pro výpočet máme použít, a to je při výpočtu integrálů asi to „nejdůležitější“ (snad podobné je to u počítání limit). A příkladů je v každé části „více“, abyste také mohli integrály srovnávat, ale pro počítání stačí pak si některé integrály vybrat.
Navíc, u výpočtu integrálů si můžete udělat zkoušku (a zároveň si tak opakovat derivování)“ - dle definice:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ v intervalu } I = (a,b) \Leftrightarrow \text{ a } F'(x) = f(x)\ ,\ x \in (a,b)\ .$$

1. Jednoduché příklady na výpočet primitivní funkce :

a) Užití tabulky primitivních funkcí a výpočet integrálu násobku funkce a součtu funkcí:

$$\int (3e^x + \frac{1}{x})\,dx\ ;\ \int (5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x})\,dx\ ;\ \int (\sqrt[3]{x} + x^5)\,dx\ ;\ \int \frac{x^3-1}{2x}\,dx\ ;\ \int \frac{(1-v)^2}{v\sqrt{v}}\,dv\ ;$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx\ ;\ \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx\ ;\ \int tg^2 u\,du\ .$$

b) Asi užitečný „návod“ pro výpočet integrálů „tahákových“ funkcí, složených s funkcí lineární:
Je-li $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ na intervalu I, pak, na odpovídajícím intervalu je

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\ ,\quad a \neq 0\ :$$

$$\int e^{-x}\,dx\ ;\ \int \cos(3x+2)\,dx\ ;\ \int 4^x\,dx\ ;$$

$$\int (3x-2)^6\,dx\ ;\ \int \sqrt{3x-2}\,dx\ ;\ \int \sqrt[3]{1-2x}\,dx\ ;\ \int \sqrt[3]{(1-2x)^2}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{5-x}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{(3x+1)^5}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{4+x}\,dx;\ \int \frac{1}{4+x^2}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{1+4x^2}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x}}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx\ ;\ \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx\ ;$$

$\int \sin^2 x\,dx$; $\int \cos^2 x\,dx$ (zde se dají „chytře“ použít „známé“ vzorce $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$).

2. Substituční pravidlo I (často se tato věta nazývá 1. věta o substituci):

Nechť : (i) funkce f má na intervalu (a,b) primitivní funkci F (nebo- li $\int f(t)\,dt = F(t)+C$ na (a,b))

a (ii) funkce g je definovaná na intervalu (α,β), $g(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ a g má vlastní derivaci g' v každém bodě intervalu (α,β), spojitou v (α,β).

Pak $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))+C \quad , x\in(\alpha,\beta).$$

$\int 2xe^{x^2}\,dx$; $\int 2xe^{-x^2}\,dx$; $\int x\sin x^2\,dx$; $\int x^2\cos x^3\,dx$; $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx$; $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$; $\int e^x\sin(e^x)\,dx$; (*) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

$\int \frac{1}{x^3}\exp(\frac{1}{x^2})\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(\sqrt{x})\,dx$; $\int \cos x\cdot\exp(\sin x)\,dx$;

$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}\,dx$; $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$; $\int \frac{1}{x\cdot(1+\ln^2 x)}\,dx$ $\int \frac{\ln x}{x\cdot(1+\ln^4 x)}\,dx$;

$\int \cos^3 x\cdot\sin x\,dx$; $\int \sin^3 x\,dx$; (*) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$; (*) $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}\,dx$;

Spec. $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|+C$ na intervalu, kde je $g(x)\neq 0$:

$\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx$; $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$; $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$; $\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}\,dx$; $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$;

$\int \frac{\sin x}{5+\cos x}\,dx$; $\int tgx\,dx$; $\int \frac{1}{1+tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$.

3. Substituční pravidlo II (často se tato věta nazývá 2. věta o substituci):

Nechť (i) funkce f je spojitá na intervalu (a,b);

(ii) funkce g má spojitou derivaci g' na intervalu (α,β), $g'\neq 0$ na intervalu (α,β) a $g(\alpha,\beta)=(a,b)$;

pak, je-li

$\int f(g(t))g'(t)\,dt = G(t)+C$ na (α,β), je na intervalu (a,b) $\int f(x)\,dx = G(g^{-1}(x))+C$.

$\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2}\,dx$ $(\sqrt{x}=t)$; $\int \frac{1+tg^2x}{1+tgx}\,dx$ $(tgx=t)$;

(*) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ ($x=\sinh t\,(=\frac{e^t-e^{-t}}{2})$).

4. Integrace „per partes“ :

Jsou-li funkce f' a g' spojité na intervalu (a,b), pak na (a,b) platí:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \ .$$

Nebo jiná (často užívaná) „verze“ věty o integraci per partes:

Jsou-li funkce u' a v' spojité na intervalu (a,b), pak na (a,b) platí:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx \ .$$

a) $\int x\sin x\,dx$; $\int x^2\cos x\,dx$; $\int x^3\ln x\,dx$; $\int x\ln^2 x\,dx$; $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

b) $\int \ln x\,dx$; $\int \frac{1}{x}\ln x\,dx$;

c) $\int \sin^2 x\,dx$; $\int \cos^2 x\,dx$; $\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$; $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;

d) per partes + substituce:

$\int arctg\,x\,dx$; $\int \arcsin x\,dx$; $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$; $\int \frac{x^2 arctg\,x}{1+x^2}\,dx$;

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.